

АКУСТИКА ПОМЕЩЕНИЙ. МУЗЫКАЛЬНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.843.242.2

ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПОМЕЩЕНИИ С ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ

© 2012 г. Н. Г. Канев

Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 16.10.2011 г.

Рассмотрена задача о затухании звука в прямоугольном помещении, акустические свойства стенок которого описываются импедансом, что приводит к зависимости коэффициента поглощения от угла падения звуковой волны. В лучевом приближении найдены законы затухания звука для различного распределения поглощения на стенках. Показано, что в помещении с импедансными стенками затухание звука происходит медленнее по сравнению с обычной моделью реверберации, когда коэффициент звукопоглощения стенок полагается независимым от угла падения. Также задача решена в волновой постановке, что позволило получить закон затухания в заданной полосе частот.

Ключевые слова: реверберация, коэффициент звукопоглощения, импеданс.

ВВЕДЕНИЕ

Время реверберации считается наиболее важным акустическим параметром помещений различного назначения и характеризует скорость затухания звука, при этом полагается, что затухание происходит по экспоненциальному закону. Часто для расчета времени реверберации используются классические формулы Сэбина [1] и Эйринга [2]. Также предложены некоторые другие формулы [3–5] для специальных случаев, например для помещений с неравномерным распределением поглощения. Проведенные измерения времени реверберации в обычной комнате с различным распределением поглощения на потолке и стенах [6] показали, что ни одна из известных формул не дает хорошего совпадения с экспериментом во всех случаях.

В помещениях регулярной формы, таких как прямоугольный параллелепипед или сфера, без звукорассеивающих элементов на стенах или в объеме затухание звука происходит не по экспоненциальному закону. При этом с увеличением неравномерности распределения поглощения на стенках помещения увеличивается отклонение закона затухания от экспоненциального [7].

Обычно коэффициент звукопоглощения — отношение поглощенной при отражении энергии к падающей — при аналитическом [1–7] или численном [8] моделировании реверберации полагается независимым от угла падения звуковой волны, хотя эта зависимость является довольно существенной, особенно при скользящих углах падения [9].

В настоящей работе исследуется влияние зависимости коэффициента звукопоглощения от угла падения волны на реверберационный процесс, для чего акустические свойства стенки характеризуются импедансом. Выбрана простая форма помещения — прямоугольный параллелепипед, каждая стенка которого имеет одинаковые акустические свойства по всей площади, что позволяет решить задачу аналитически и провести сравнения с моделью, в которой коэффициенты звукопоглощения постоянны. Здесь расчет законов затухания производится в приближении геометрической акустики, которое широко применяется для решения различных задач акустики помещений и обычно называется методом лучевых траекторий. Данное приближение не в полной мере учитывает волновой характер распространения звука, поэтому поставленная задача решается также в волновой постановке.

МЕТОД ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Акустическое моделирование помещений часто производится при помощи метода лучевых траекторий [10, 11], согласно которому луч определяется как траектория частицы, движущейся прямолинейно с зеркальными отражениями от стенок помещения. Звуковая энергия переносится вдоль луча со скоростью звука и при каждом отражении уменьшается на величину, равную коэффициенту звукопоглощения. Расчет звуковой энергии в помещении, являющейся суммой энергий всех лучей, сводится, таким образом, к слеже-

нию за спадом звуковой энергии вдоль каждого луча.

Рассмотрим прямоугольное помещение с размерами L, D, H . Начало системы координат поместим в одном из углов помещения, а оси направим вдоль ребер, как показано на рис. 1. Стенкам помещения, перпендикулярным оси z , присвоим номера 1 и 2, стенкам, перпендикулярным оси x , — номера 3 и 4, стенкам, перпендикулярным оси y , — номера 5 и 6. Поглощающие свойства стенок описываются коэффициентами отражения γ_i (отношение отраженной энергии к падающей) и поглощения $\alpha_i = 1 - \gamma_i$, где i — номер стенки. Стенки помещения полагаются нерассеивающими, поэтому отражение звука происходит зеркально.

Звуковое поле представим в виде набора лучей, имеющих одинаковую энергию в начальный момент времени. Луч задается углами φ и θ , соответствующими его направлению до первого отражения. Выберем равномерное распределение лучей по углам φ и θ в начальный момент времени, что физически соответствует импульсному возбуждению звукового поля точечным источником. Звуковая энергия в помещении определяется суммой энергий всех лучей. В случае непрерывного углового распределения лучей звуковая энергия в помещении задается интегралом [7]

$$E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(t, \theta, \varphi) \cos \theta d\theta d\varphi, \quad (1)$$

где $\varepsilon(t, \theta, \varphi)$ — энергия луча, начальное направление которого задается углами φ и θ .

Начальная энергия всех лучей одинакова $\varepsilon(0, \theta, \varphi) = 1$, начальная звуковая энергия в помещении равна $E(0) = 1$. При каждом отражении от стенки часть энергии поглощается, и для определения остаточной звуковой энергии необходимо пересчитать количество отражений от каждой стенки за время t . В прямоугольном помещении это легко сделать методом мнимых источников [5, 7]. Число отражений $n_i(t, \theta, \varphi)$ от i -й стенки за время t для луча, начальное направление которого задается углами θ и φ , составляет

$$n_{1,2}(t, \theta, \varphi) = \frac{ct}{2H} |\sin \theta|, \quad (2)$$

$$n_{3,4}(t, \theta, \varphi) = \frac{ct}{2L} |\cos \theta \cos \varphi|, \quad (3)$$

$$n_{5,6}(t, \theta, \varphi) = \frac{ct}{2D} |\cos \theta \sin \varphi|, \quad (4)$$

где c — скорость звука в среде.

После всех отражений за время t остаточная энергия луча составляет $\prod_{i=1}^6 \gamma_i^{n_i(t, \theta, \varphi)} = \exp \sum_{i=1}^6 n_i(t, \theta, \varphi) \ln \gamma_i$, т.е. энергия луча уменьша-

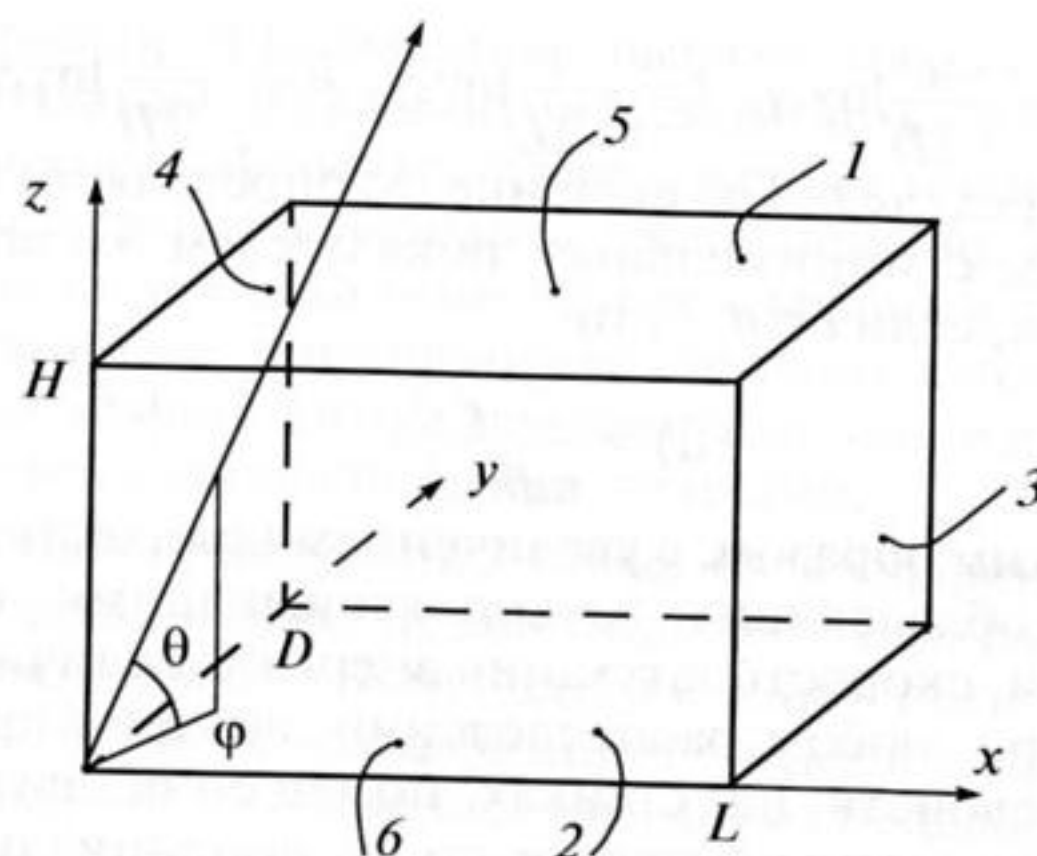


Рис. 1. Прямоугольное помещение.

ется со временем по экспоненциальному закону. Полную энергию звукового поля в помещении найдем интегрированием по углам φ и θ

$$E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sum_{i=1}^6 n_i(t, \theta, \varphi) \ln \gamma_i} \cos \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

Предложенная постановка задачи не содержит дифракционных явлений. Однако при наличии дифрагирующих препятствий, например окна [12], их учет приведет к изменению закона затухания (5).

В работах [7, 13] при помощи выражения (5) получены законы затухания в помещениях с различным распределением поглощения на стенках для случая коэффициентов поглощения и отражения, не зависящих от угла падения звукового луча. Приведем некоторые результаты.

Если в помещении только одна стенка, для определенности — стенка с номером 1, обладает поглощающими свойствами, т.е. $0 < \gamma_1 < 1$ и $\gamma_i = 1$ при $i \neq 1$, то при $t \gg \left| \frac{H}{c \ln \gamma_1} \right|$ звуковая энергия в помещении уменьшается по закону

$$E(t) \approx -\frac{2H}{ct \ln \gamma_1}. \quad (6)$$

Если в помещении две непараллельные поглощающие стенки, т.е. $0 < \gamma_1, \gamma_3 < 1$ и $\gamma_i = 1$ при $i \neq 1, 3$, то при $t \gg \left| \frac{H}{c \ln \gamma_1} \right|, \left| \frac{L}{c \ln \gamma_3} \right|$ имеем

$$E(t) \approx \frac{8HL}{\pi \ln \gamma_1 \ln \gamma_3 (ct)^2}. \quad (7)$$

Наконец, если все стенки поглощающие, то при $t \gg \frac{H}{c \ln \gamma_1 \gamma_2}, \frac{L}{c \ln \gamma_3 \gamma_4}, \frac{D}{c \ln \gamma_5 \gamma_6}$ закон затухания имеет вид

$$E(t) \approx \frac{2}{\pi t^2} \frac{le^{-lt} + de^{-dt} + he^{-ht}}{ldh}, \quad (8)$$

где $d = -\frac{c}{2D} \ln \gamma_5 \gamma_6$, $l = -\frac{c}{2L} \ln \gamma_3 \gamma_4$, $h = -\frac{c}{2H} \ln \gamma_1 \gamma_2$.

В пределе $t \rightarrow \infty$ значение (8) определяется слагаемым с минимальным показателем экспоненты. Так, если $l < d, h$, то

$$E(t) \approx \frac{2}{\pi d h} \frac{e^{-lt}}{t^2}. \quad (9)$$

Таким образом, с увеличением количества стенок, обладающих звукопоглощающими свойствами, скорость затухания энергии увеличивается. При любом распределении звукопоглощающих свойств на стенках помещения звуковая энергия уменьшается не по экспоненциальному закону, хотя энергия каждого отдельного луча убывает экспоненциально со временем. При этом экспоненциальный множитель появляется в законе затухания только если в помещении нет параллельных непоглощающих стенок.

При характеристике звукопоглощающих свойств стенок импедансом Z_i , где i — номер стенки, коэффициент отражения становится зависимым от угла падения ψ [9]

$$\gamma_i(\psi) = \left| \frac{Z_i \sin \psi - 1}{Z_i \sin \psi + 1} \right|^2. \quad (10)$$

Здесь импеданс стенки нормирован на импеданс среды ρc , заполняющей помещение, где ρ — плотность среды. Нормальное падение соответствует углу $\psi = \pi/2$. Углы θ и ϕ , задающие направление луча, связаны с углами падения ψ_{12} , ψ_{34} , ψ_{56} на стенки 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 следующим образом

$$\sin \psi_{12} = |\sin \theta|, \quad (11)$$

$$\sin \psi_{34} = |\cos \theta \cos \phi|, \quad (12)$$

$$\sin \psi_{56} = |\cos \theta \sin \phi|, \quad (13)$$

Из уравнений (10)–(13) находятся коэффициенты отражения каждой стенки $\gamma_i(\theta, \phi)$. Звуковая энергия в помещении может быть найдена при помощи уравнения (5), в которое вместо постоянных коэффициентов γ_i необходимо подставить выражения $\gamma_i(\theta, \phi)$. Таким образом, закон затухания звуковой энергии в прямоугольном помещении с импедансными стенками также определяется выражением (5). Рассмотрим несколько вариантов распределения звукопоглощения на стенках помещения и сравним их с результатами, полученными в предположении независимости коэффициентов отражения и поглощения от угла падения и приведенными выше.

В первую очередь рассмотрим помещение с одной поглощающей стенкой. Для этого стенку 1 будем характеризовать импедансом Z_1 , а остальные

стенки — коэффициентом отражения $\gamma_i = 1$ при $i \neq 1$. Вводя переменную $u = \sin \theta$, из (5) находим

$$E(t) = \int_0^1 \exp\left(\frac{ct}{2H} \ln \gamma_1(u) u\right) du, \quad (14)$$

где $\gamma_1(u) = |(Z_1 u - 1)/(Z_1 u + 1)|^2$ получено из (10) и (11).

Подынтегральная функция в (14) быстро уменьшается с увеличением аргумента u и, следовательно, значение интеграла определяется значениями подынтегральной функции в окрестности точки $u = 0$. При $u \ll 1$ имеем $\gamma_1(u) \approx 1 - 4u \operatorname{Re} Z_1$. Кроме этого, можно проинтегрировать (14) от 0 до ∞ , что практически не изменит значение интеграла. В этих приближениях выражение (14) легко вычисляется

$$E(t) \approx \int_0^\infty \exp\left(-2 \operatorname{Re} Z_1 \frac{ct}{H} u^2\right) du = \sqrt{\frac{\pi H}{8ct \operatorname{Re} Z_1}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (15)$$

Затухание звука происходит по закону $\sim 1/\sqrt{t}$, т.е. медленнее по сравнению с законом затухания, полученным для постоянного коэффициента отражения (ср. (6) и (15)).

Физический смысл полученного результата заключается в следующем. В начальный момент времени энергия распределена равномерно по всем лучам и в первую очередь поглощается энергия лучей, падающих на поглощающую стенку под большими углами. Медленнее всего теряют энергию лучи, распространяющиеся практически параллельно поглощающей стенке, т.е. направляющий угол которых $|\theta| \ll 1$. Это происходит из-за того, что, во-первых, эти лучи редко отражаются от поглощающей стенки — большинство отражений приходится на непоглощающие стенки, перпендикулярные поглощающей, а во-вторых, коэффициент поглощения при скользком падении на импедансную стенку близок к нулю, как следует из (10). Согласно (11) угол падения на стенку 1 равен $\psi_1 = |\theta|$ и коэффициент поглощения равен $\alpha_1(\theta) = 1 - \gamma_1(\theta) \approx 4|\theta| \operatorname{Re} Z_1$, т.е. $\alpha_1(\theta) \ll 1$ при $|\theta| \ll \frac{1}{4 \operatorname{Re} Z_1}$. Поскольку для эффективных поглощающих материалов характерное значений действительной части импеданса близко к 1, то направляющие углы лучей, практически полностью отражающихся от поглощающей стенки, имеют значения $|\theta| \ll 0.25$. Таким образом, со временем звуковая энергия в помещении определяется только лучами, распространяющимися вдоль поглощающей стенки.

В помещении с двумя поглощающими стенками (номера стенок — 1 и 3) из (5) получаем

$$E(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{ct}{2L} \cos \theta \cos \phi \ln \gamma_3(\theta, \phi) + \frac{ct}{2H} \sin \theta \ln \gamma_1(\theta)\right) \cos \theta d\theta d\phi, \quad (16)$$

где $\gamma_1(\theta) = |(Z_1 \sin \theta - 1)/(Z_1 \sin \theta + 1)|^2$ получено из (10) и (11), $\gamma_3(\theta, \varphi) = |(Z_3 \cos \theta \cos \varphi - 1)/(Z_3 \cos \theta \cos \varphi + 1)|^2$ получено из (10) и (12).

Полагая $\gamma_1(\theta) \approx 1 - 4\theta \operatorname{Re} Z_1$ при $\theta \ll 1$ и $\gamma_3(\theta, \varphi) \approx 1 - 4\varphi \cos \theta \operatorname{Re} Z_3$ при $\varphi \ll 1$, интегрируем (16) по φ и получаем интеграл по θ , который вычисляется так же, как (14). Получаем выражение для звуковой энергии в помещении

$$E(t) \approx \frac{\pi}{8ct} \sqrt{\frac{HL}{\operatorname{Re} Z_1 \operatorname{Re} Z_3}} \sim \frac{1}{t}. \quad (17)$$

Затухание звука происходит по закону $\sim 1/t$, т.е. медленнее по сравнению с законом затухания, полученным для помещения, имеющего стенки с постоянным коэффициентом отражения (ср. (7) и (17)).

Наконец рассмотрим общий случай, когда импедансы Z_i всех стенок имеют ненулевую действительную часть. Подставляя коэффициенты отражения $\gamma_i(\theta, \varphi)$, определяемые выражениями (11)–(13), в (5) и вычисляя полученные интегралы способом, примененным для вычисления интеграла в (14), находим выражение для звуковой энергии в помещении

$$E(t) \approx \frac{1}{ct} \sqrt{\frac{LHD}{8 \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2) \operatorname{Re}(Z_3 + Z_4) \operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}} \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}{D}} e^{-dt} + \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_3 + Z_4)}{L}} e^{-lt} + \right. \quad (18) \\ \left. + \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)}{H}} e^{-ht} \right),$$

где $d = -\frac{c}{2D} \ln \gamma_{\perp 5} \gamma_{\perp 6}$, $l = -\frac{c}{2L} \ln \gamma_{\perp 3} \gamma_{\perp 4}$, $h = -\frac{c}{2H} \ln \gamma_{\perp 1} \gamma_{\perp 2}$, $\gamma_{\perp i} = \left| \frac{Z_i - 1}{Z_i + 1} \right|^2$ — коэффициент отражения при нормальном падении на стенку.

При $t \rightarrow \infty$ звуковая энергия определяется наименьшим показателем в экспонентах в (18). Если, например, $l < d, h$, то из (18) получаем

$$E(t) \approx \frac{e^{-lt}}{ct} \sqrt{\frac{HD}{8 \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2) \operatorname{Re}(Z_5 + Z_6)}}. \quad (19)$$

Как и в предыдущих случаях, закон затухания звука в помещении с импедансными стенками отличается от закона затухания в помещении со стенками, имеющими коэффициент поглощения, не зависящий от угла падения.

Отметим отличие полученного результата от результатов работы [14], в которой при применении численных методов анализа не было обнаружено значительного влияния угловой зависимости коэффициента поглощения на спад звуковой энергии в прямоугольном помещении с импедансными стенками без рассеяния.

Применим полученные выражения для расчета затухания звука в кубическом помещении со стороной L . В соответствии с изложенным выше рассмотрим три варианта распределения поглощения по стенкам помещения и сравним законы затухания для помещения со стенками с постоянным коэффициентом звукопоглощения и для помещения с импедансными стенками.

Примем следующие значения коэффициента звукопоглощения, независимого от угла падения звукового луча: в помещении с одной поглощающей стеной ее коэффициент звукопоглощения равен $\alpha_1 = 0.9$; в помещении с двумя непараллельными поглощающими стенками их коэффициент звукопоглощения равен $\alpha_2 = 0.45$; в помещении с равномерным распределением поглощения коэффициент звукопоглощения всех стенок равен $\alpha_3 = 0.15$. Значения коэффициентов звукопоглощения выбраны таким образом, чтобы средний по всему помещению коэффициент звукопоглощения $\bar{\alpha}$ был одинаков для всех случаев.

При описании акустических свойств стенок импедансом, т.е. при учете зависимости коэффициента поглощения от угла падения, подберем такие значения импеданса, чтобы коэффициент поглощения, усредненный по углу, совпадал с выбранными значениями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поскольку влияние мнимой части импеданса на коэффициент звукопоглощения в рассматриваемой задаче второстепенно, то примем ее равной нулю, тогда в соответствии с заданным условием импедансы стенок для трех вариантов распределения поглощения равны $Z_1 = 0.75, Z_2 = 0.19, Z_3 = 0.05$.

Расчет спадов звуковой энергии для двух способов описания звукопоглощающих свойств стенок помещения и для трех вариантов распределения поглощения приведен на рис. 2, где введено безразмерное время $\tau = ct/L$. При неравномерном распределении поглощения кривые спада существенно отличаются от экспоненты, что вызывает известные проблемы с определением времени реверберации по этим кривым [13]. В случае равномерного распределения рассчитанные кривые мало отличаются от экспонент на значимом участке спада (до -60 дБ), но при этом время реверберации, характеризующее наклон кривых на рис. 2в, оказывается больше в помещении с импедансными стенками.

ВОЛНОВОЙ РАСЧЕТ

В рамках метода лучевых траекторий не рассматривается ряд существенных характеристик звукового поля, например, не учитываются фазовые соотношения колебаний в разных точках помещения. Кроме этого, частота звука не является параметром задачи, она может быть введена опосредованно через частотнозависимый импеданс

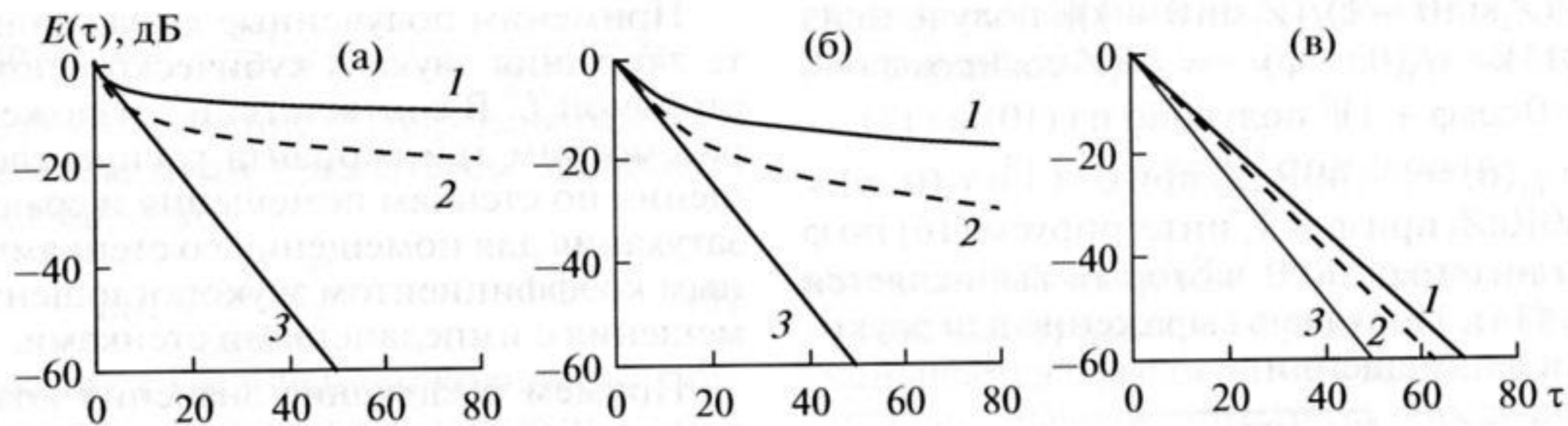


Рис. 2. Расчет затухания звуковой энергии в кубическом помещении при характеристике акустических свойств его стенок импедансом (кривые 1) или постоянным коэффициентом звукопоглощения (кривые 2). (а) помещение с одной поглощающей стенкой, (б) помещение с двумя непараллельными поглощающими стенками, (в) помещение со всеми поглощающими стенками (равномерное распределение поглощения). Кривая 3 — затухание по Сэбину.

стенок или спектр излучения источника. Для оценки приемлемости приближений метода лучевых траекторий сопоставим полученное решение с решением в волновом приближении. При этом ограничимся рассмотрением помещения с одной импедансной стенкой.

В прямоугольном помещении (рис. 1) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0, \quad (20)$$

и граничные условия

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0,L} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0,D} = \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{p}{v_z} \right|_{z=H} = \rho c Z, \quad (21)$$

где p — давление, v_z — компонента скорости в направлении z , ω — частота, Z — безразмерный импеданс поглощающей стенки.

Решение (20–21) может быть записано в виде суммы мод

$$p = \sum_{n,m,q} a_{nmq} P_{nmq}, \quad P_{nmq} = \cos \xi_n x \cos \psi_m y \cos \zeta_q z, \quad (22)$$

где $n, m, q = 0, 1, 2, \dots$, a_{nmq} — коэффициент возбуждения моды (n, m, q) , $\xi_n = \frac{\pi n}{2L}$, $\psi_m = \frac{\pi m}{2D}$, ζ_q — решения следующего уравнения

$$\zeta_q \operatorname{tg} \zeta_q H = -i \frac{\omega}{cZ}. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (20), получаем

$$\left(\frac{\pi n}{2L} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{2D} \right)^2 + \zeta_q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (24)$$

Введем безразмерное волновое число $k = \zeta H$ и безразмерную частоту $\Omega = \frac{H}{c} \omega$, а также параметр $A = \left(\frac{\pi n H}{2L} \right)^2 + \left(\frac{\pi m H}{2D} \right)^2$, характеризующий порядок моды по номерам n и m . Тогда из (23) и (24) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} Z k \operatorname{tg} k = -i \Omega \\ A + k^2 = \Omega^2 \end{cases}, \quad (25)$$

определяющую резонансные частоты мод и соответствующие им компоненты волнового числа в направлении z .

Для упрощения дальнейших оценок положим, что Z — действительная величина и $Z \neq 1$. Кроме этого, будем рассматривать моды высокого порядка по n и m , т.е. $A \gg 1$.

Найдем коэффициенты затухания мод, т.е. мнимые части резонансных частот. Решения (k_q, Ω_q) системы (25) будем нумеровать, начиная с решения, для которого $\operatorname{Re} k_q$ имеет минимальное значение, и далее в порядке увеличения $\operatorname{Re} k_q$.

Для нулевой моды ($q = 0$) из (25) получаем $\operatorname{Re} k_0 = 0$ и $\operatorname{Re} \Omega_0 = 0$, при этом мода оказывается быстро затухающей $\operatorname{Im} \Omega_0 \sim -\sqrt{A}$.

На рис. 3 представлены первые пять решений системы (25), найденные численно, начиная с $q = 1$. Для расчета принято значение импеданса $Z = 0.9$ и три значения параметра A , соответствующие в кубическом помещении модам с номерами $n = 1, m = 0$ для $A = 2.5$; $n = 2, m = 0$ для $A = 10$; $n = 4, m = 0$ для $A = 40$.

Мода с номером $q = 1$ имеет наименьший коэффициент затухания при фиксированных n и m . Анализ (25) показывает, что решение (25) для $q = 1$ имеет вид

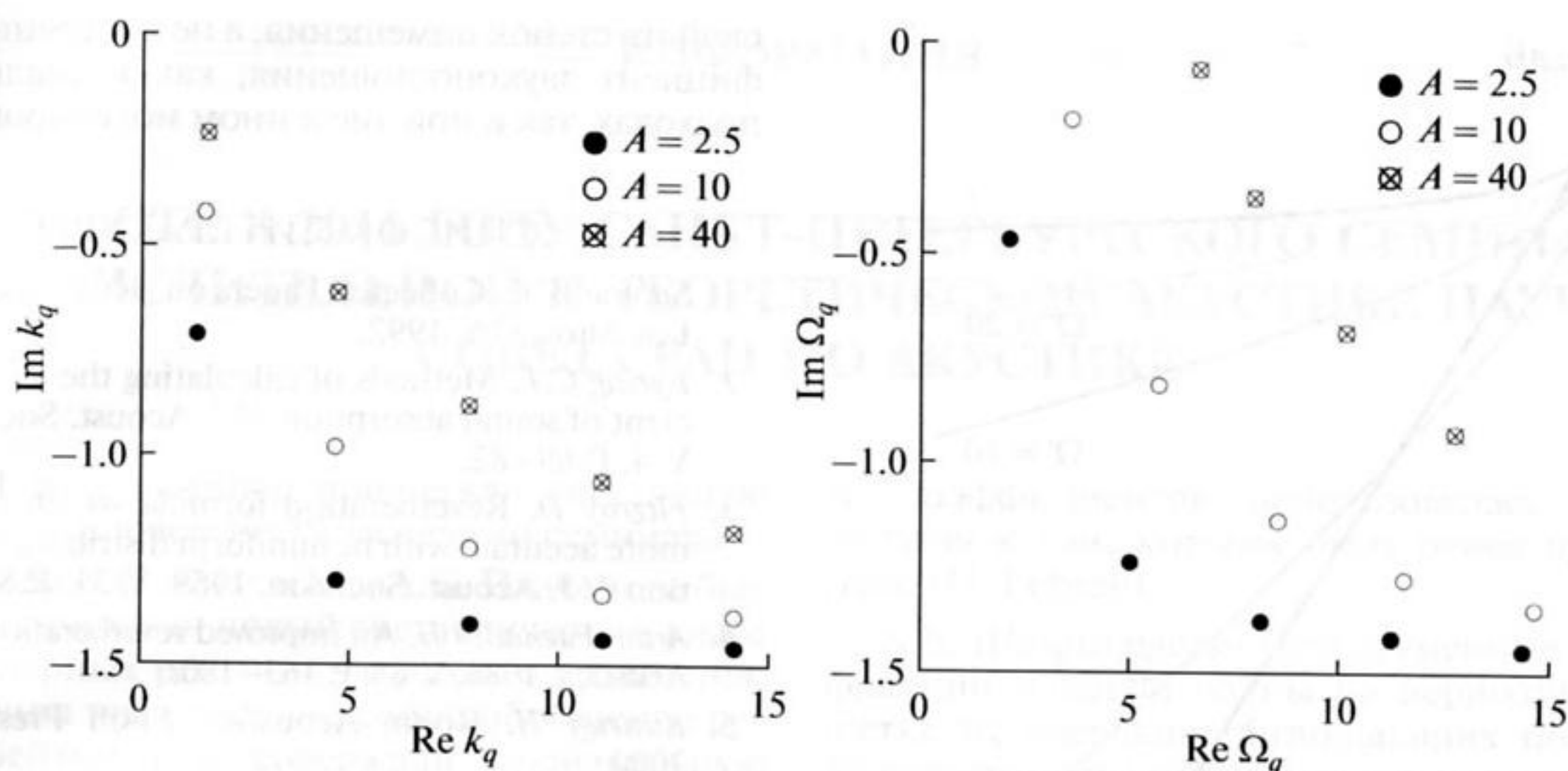
$$k_1 \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - i \frac{Z}{\sqrt{A}} \right), \quad \Omega_1 \approx \sqrt{A} - i \frac{\pi^2 Z}{4 A}. \quad (26)$$

Таким образом, наиболее медленно затухающими модами являются моды $(n, m, 1)$, при этом их коэффициент затухания уменьшается и стремится к нулю с увеличением номеров n и m .

В кубическом помещении $L = D = H$, $A = \frac{\pi^2}{4} (n^2 + m^2)$ энергия моды $(n, m, 1)$ согласно (26) затухает по закону

$$P_{nm1}^2 \sim \exp \left(- \frac{2Z}{n^2 + m^2} \frac{ct}{H} \right). \quad (27)$$

Выберем луч, задаваемый углами φ и θ , для которого


 Рис. 3. Решения системы уравнений (25) для $q = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\text{tg}\varphi = m/n \text{ и } \text{tg}\theta = q/\sqrt{n^2 + m^2}. \quad (28)$$

Для медленно затухающих мод $q = 1$ и $\sqrt{n^2 + m^2} \gg 1$ угол между лучом и импедансной стенкой составляет $\theta \approx 1/\sqrt{n^2 + m^2}$. Подставляя последнее выражение в (27), получим $P_{nm1}^2 \sim \exp(-2Zct\theta^2/H)$, что совпадает с подынтегральным выражением (15), определяющим закон затухания луча, падающего на поглощающую стенку под углом θ (переменная интегрирования u в (15) по определению $u = \sin\theta \approx \theta$). Поэтому в смысле закона затухания моде $(n, m, 1)$ соответствует луч, задаваемый углами $\text{tg}\varphi = m/n$ и $\theta \approx 1/\sqrt{n^2 + m^2}$.

Таким же образом каждой моде (n, m, q) можно поставить в соответствие луч, определяемый (28). Очевидно, что модам соответствуют только замкнутые лучевые траектории. Закон затухания звука в помещении определяется суммой всех возбужденных мод или суммой соответствующих им лучей. Заменяя суммирование интегрированием, можно получить законы затухания, аналогичные (5). При этом в интеграл (5) необходимо внести интегрирование по частоте для учета спектра источника.

Решение, полученное в волновой постановке, позволяет найти закон затухания в заданной полосе частот. Ограничим рассматриваемые частоты значением Ω' и получим закон затухания в полосе частот $\Omega < \Omega'$. В этом случае необходимо учесть моды, для которых $n^2 + m^2 < 4\Omega'/\pi^2$, что соответствует ограничению углов, определяющих направление лучей, $\theta > \theta' = \pi/2\Omega'$. Для упрощения предположим, что коэффициенты возбуждения всех мод одинаковы, тогда с учетом ограничения по углу из (5) находим закон затухания в полосе частот для $\theta' \ll 1$

$$E(\tau) = \int_{\theta'}^1 \exp(-2\tau Z u^2) du. \quad (29)$$

Нижний предел интегрирования в (29) определяется частотой Ω' , ограничивающей полосу сверху. Если полоса будет также ограничена снизу, то это приведет к изменению верхнего предела интегрирования в (29). При $\tau \rightarrow \infty$ закон затухания определяется самой медленно затухающей модой в рассматриваемой полосе частот и имеет вид $E(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\pi^2 Z}{2\Omega'} \tau\right)$.

Рассмотрим кубическое помещение с одной поглощающей стенкой, для которого закон затухания звука представлен кривой I на рис. 2а. Расчет кривых затухания для этого помещения в полосах частот $\Omega < \Omega'$, ограниченных значениями $\Omega' = 5, 10, 20$, представлен на рис. 4. С расширением полосы частот скорость затухания звука уменьшается, а кривая затухания приближается к степенному закону (15).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В лучевом приближении найдены законы затухания звука в прямоугольном помещении для двух способов описания акустических свойств стенок помещения: постоянным коэффициентом звукопоглощения и акустическим импедансом. Спад звуковой энергии происходит медленнее в модели помещения с импедансными стенками.

Результаты, полученные в лучевом приближении, сопоставлены с решением в волновом приближении на примере помещения с одной импедансной стенкой. Показано, что в лучевом приближении закон затухания определяется лучами,

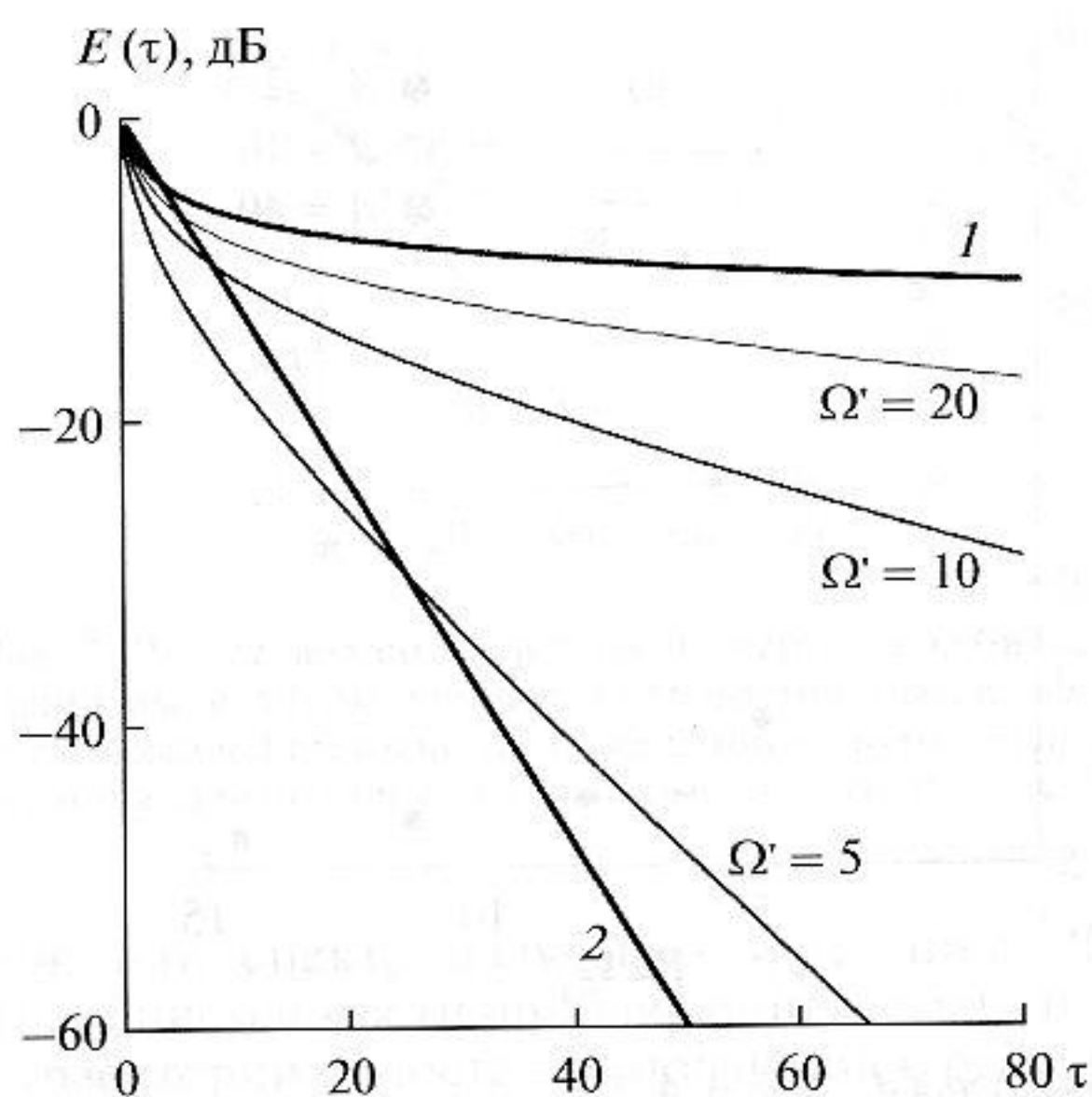


Рис. 4. Кривые затухания в кубическом помещении с одной импедансной стенкой в полосе частот $\Omega < \Omega'$. Кривая 1 — степенной закон затухания (15), кривая 2 — затухание по Сэбину.

падающими на импедансную стенку под скользящими углами, а в волновом расчете — модами вида (n, m, l) . При этом временная зависимость энергии соответствующих мод и лучей оказывается одинаковой. Законы затухания звука также одинаковы при соответствии начального распределения энергии по лучам набору возбужденных мод. Ограничение полосы частот, которое может быть учтено в волновом расчете, приводит к изменению закона затухания: он содержит экспоненциальный множитель, который определяется максимальной частотой в рассматриваемой полосе.

Итак, в настоящей работе продемонстрировано существенное влияние зависимости коэффициента звукопоглощения стенок от угла падения звуковой волны на затухание звуковой энергии в прямоугольном помещении, особенно при неравномерном распределении поглощения. Подобный результат можно ожидать и в других помещениях со слабыми рандомизирующими свойствами. В этой связи представляется важным применять импеданс для описания акустических

свойств стенок помещения, а не постоянный коэффициент звукопоглощения, как в аналитических подходах, так и при численном моделировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sabine W.C. Collected Papers on Acoustics. Peninsula, Los Altos, CA, 1992.
2. Eyring C.F. Methods of calculating the average coefficient of sound absorption // J. Acoust. Soc. Am. 1932. V. 4. P. 69–82.
3. Fitzroy D. Reverberation formula which seems to be more accurate with nonuniform distribution of absorption // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31. P. 893–897.
4. Arau-Puchades H. An improved reverberation formula // Acustica. 1988. V. 65. P. 163–180.
5. Kuttruff H. Room Acoustics. Spon Press, London, 2000.
6. Bistafa S.R., Bradley J.S. Predicting reverberation times in a simulated classroom // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. P. 1721–1731.
7. Kanev N. Sound decay in a rectangular room with specular and diffuse reflecting surfaces // Proc. of Forum Acusticum, June 27–July 1, 2011, Aalborg, Denmark. P. 1935–1940.
8. Помпеи А., Сумбатян М.А., Тодоров Н.Ф. Виртуальные компьютерные модели помещений: метод лучевых траекторий и алгоритмы аурализации // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 760–771.
9. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 436 с.
10. Joyce W.B. Sabine's reverberation time and ergodic auditoriums // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 58. P. 643–655.
11. Gilbert E.N. Ray statistics in reverberation // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 83. P. 1804–1808.
12. Shabalina E.D., Shirgina N.V., Shanin A.V. High-frequency modes in a two-dimensional rectangular room with windows // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 4. P. 525–536.
13. Канев Н.Г. О проблеме прогнозирования и измерения времени реверберации в прямоугольных помещениях // Сборник трудов Научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.В. Римского-Корсакова. С. 83–87. М.: ГЕОС, 2010.
14. Benedetto G., Spagnolo R. Reverberation time in enclosures: The surface reflection law and the dependence of the absorption coefficient on the angle of incidence // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 77. P. 1447–1451.